



INF 1771 – Inteligência Artificial

Aula 20 – Lógica Fuzzy
2016.1



Prof. Augusto Baffa
<abaffa@inf.puc-rio.br>



Introdução

- A **Lógica Fuzzy** é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy.
- Tradicionalmente, uma proposição lógica tem dois extremos: ou é completamente verdadeiro ou é completamente falso.
- Entretanto, na lógica Fuzzy, uma premissa varia em **grau de verdade** de 0 a 1, o que leva a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa.

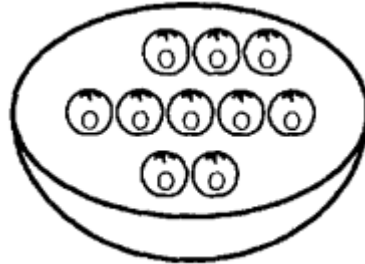
Introdução

- Considerando a seguinte sentença: **Mário é alto.**
- A proposição é verdadeira para uma altura de Mario 1.65m?
- O termo linguístico “**alto**” é vago, como interpretá-lo?
- A teoria de conjuntos Fuzzy (semântica para lógica fuzzy) permite especificar quão bem um objeto satisfaz uma descrição vaga (predicado vago)

Introdução

- **Lógica convencional:** sim/não, verdadeiro/falso
- **Lógica Fuzzy (difusa ou nebulosa):**
 - Refletem o que as pessoas pensam
 - Tenta modelar o nosso senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum
 - Trabalha com uma grande variedade de informações vagas e incertas, as quais podem ser traduzidas por expressões do tipo: a maioria, mais ou menos, talvez, etc.

Introdução

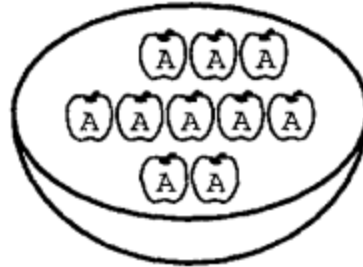


Isso é uma bacia de laranjas?

Sim

Fuzzy: Sim, com certeza!

Introdução

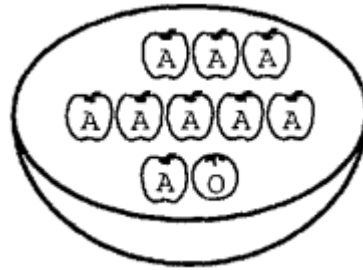


Isso é uma bacia de laranjas?

Não

Fuzzy: Não, com certeza!

Introdução

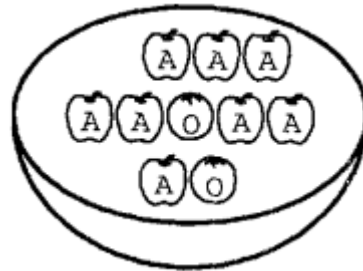


Isso é uma bacia de laranjas?

Não? Sim?

Fuzzy: Não

Introdução

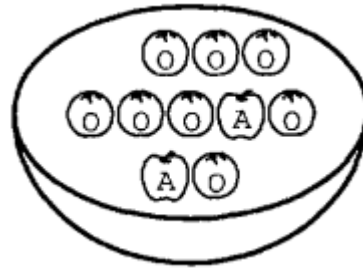


Isso é uma bacia de laranjas?

Não? Sim?

Fuzzy: Um pouco

Introdução



Isso é uma bacia de laranjas?

Não? Sim?

Fuzzy: A maior parte

Introdução

- Sistemas baseados em lógica fuzzy podem ser usado para gerar estimativas, tomadas de decisão, sistemas de controle mecânico...
 - Ar condicionado.
 - Controles de automóveis.
 - Casas inteligentes.
 - Controladores de processo industrial.
 - etc...

Introdução

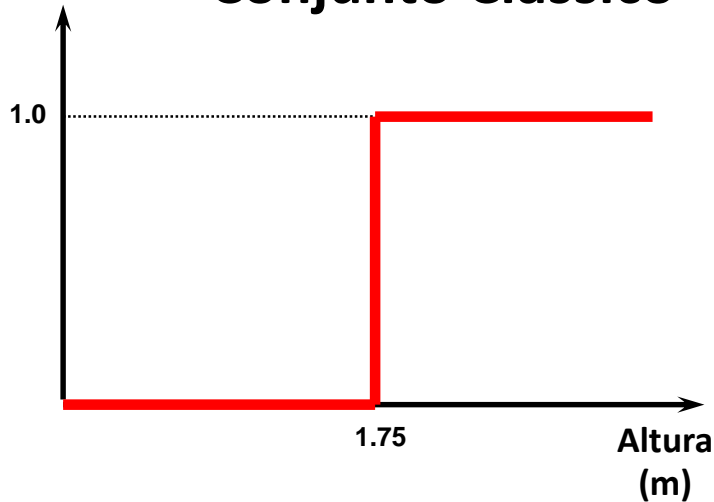
- O **Japão** é um dos maiores utilizadores e difusores da lógica fuzzy.
 - O **metrô** da cidade de Sendai utiliza desde 1987 um sistema de controle fuzzy.
 - **Aspiradores de pó e máquinas de lavar** da empresa Matsushita - carrega e ajusta automaticamente à quantidade de detergente necessário, a temperatura da água e o tipo de lavagem.
 - **TVs da Sony** utilizam lógica fuzzy para ajustar automaticamente o contraste, brilho, nitidez e cores.
 - A **Nissan** utiliza lógica fuzzy em seus **carros** no sistema de transmissão automática e freios antitravamento.

Conjuntos Fuzzy

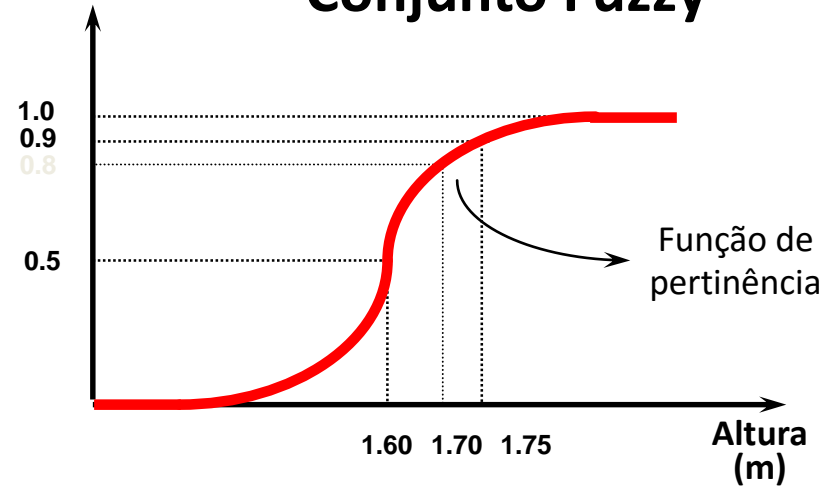
- Conjuntos com limites imprecisos

A = Conjunto de pessoas altas

Conjunto Clássico



Conjunto Fuzzy



Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy A definido no universo X é caracterizado por uma **função de pertinência** u_A , a qual mapeia os elementos de X para o intervalo [0,1].

$$u_{A:X} \rightarrow [0,1]$$

- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento y pertencente a X um número real no intervalo [0,1], que representa o **grau de pertinência** do elemento y ao conjunto A, isto é, o quanto é possível para o elemento y pertencer ao conjunto A.
- Uma sentença pode ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa.

Conjuntos Fuzzy

- **Definição formal:** Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(x, u_A(x)) \mid x \in X\}$$

Conjunto Fuzzy

Função de Pertinência

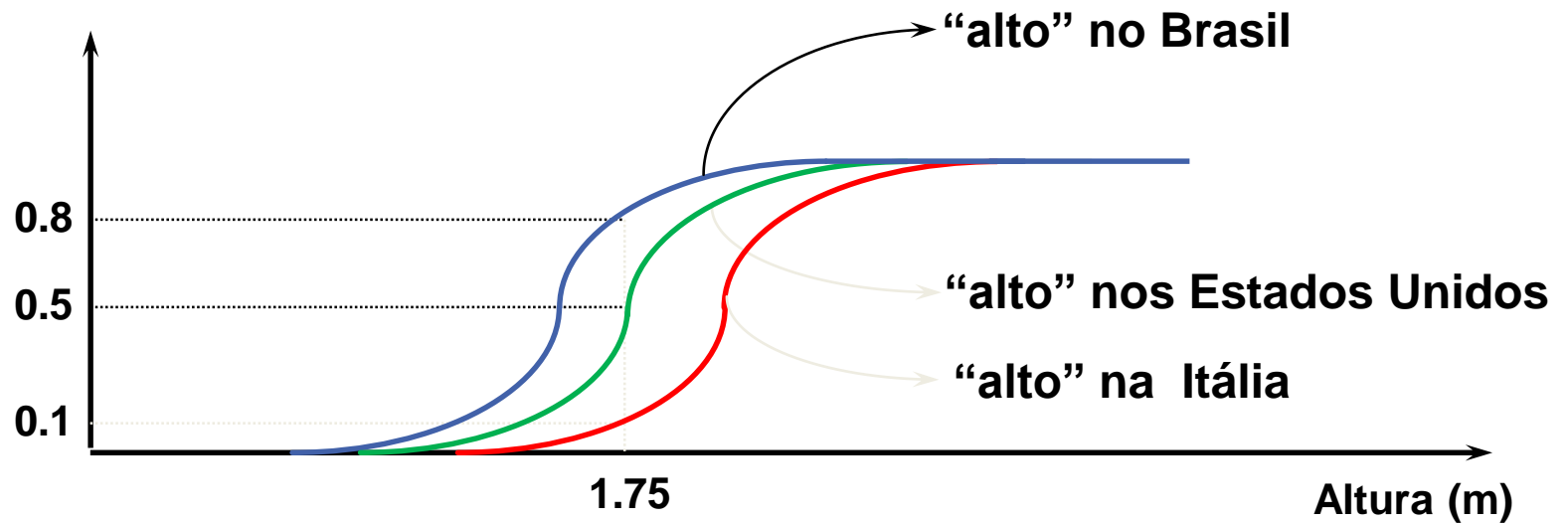
Universo

Um conjunto fuzzy é totalmente caracterizado por sua função de pertinência.

Função de Pertinência

- **Reflete o conhecimento** que se tem em relação a intensidade com que o objeto **pertence ao conjunto fuzzy**.
- Várias formas diferentes.
- Características das funções de pertinência:
 - Medidas subjetivas.
 - Funções não probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.

Função de Pertinência



Função de Pertinência

- **Função Triangular:**

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- **Função Trapezoidal:**

$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- **Função Gaussiana:**

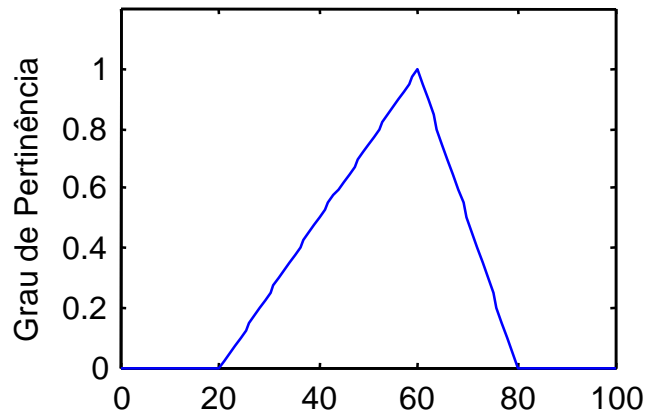
$$\text{gaussmf}(x; a, b, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

- **Função Sino Generalizada:**

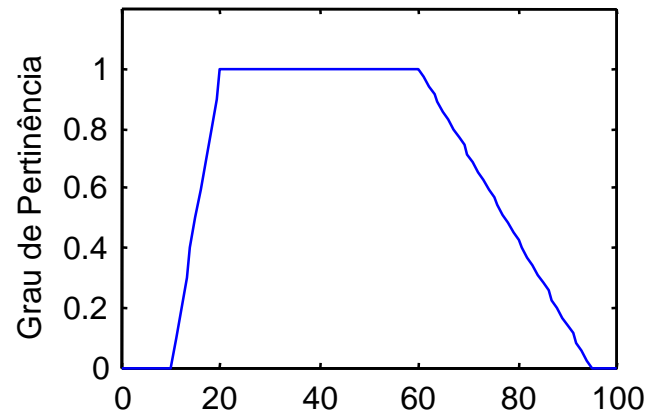
$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Função de Pertinência

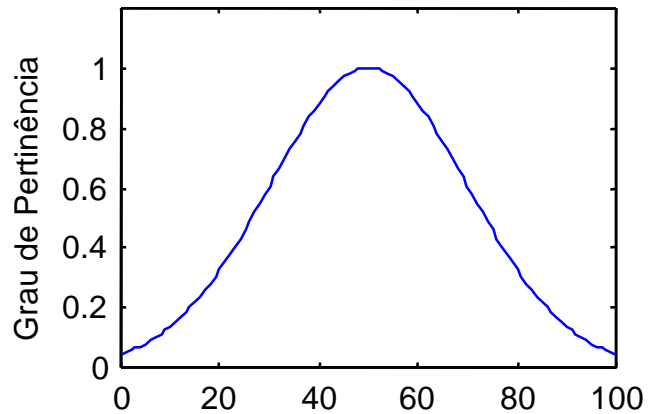
(a) Triangular



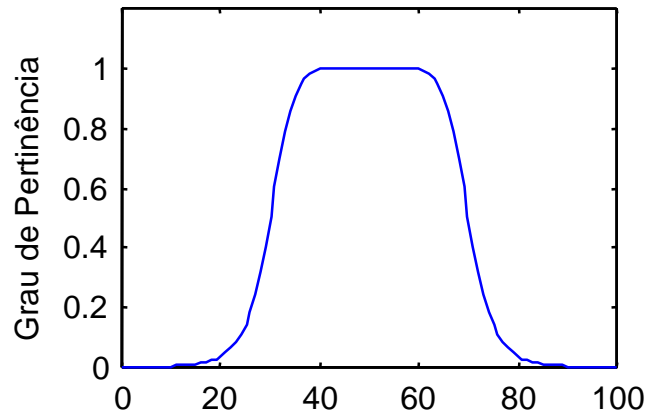
(b) Trapezoidal



(c) Gaussiana



(d) Sino Generalizada

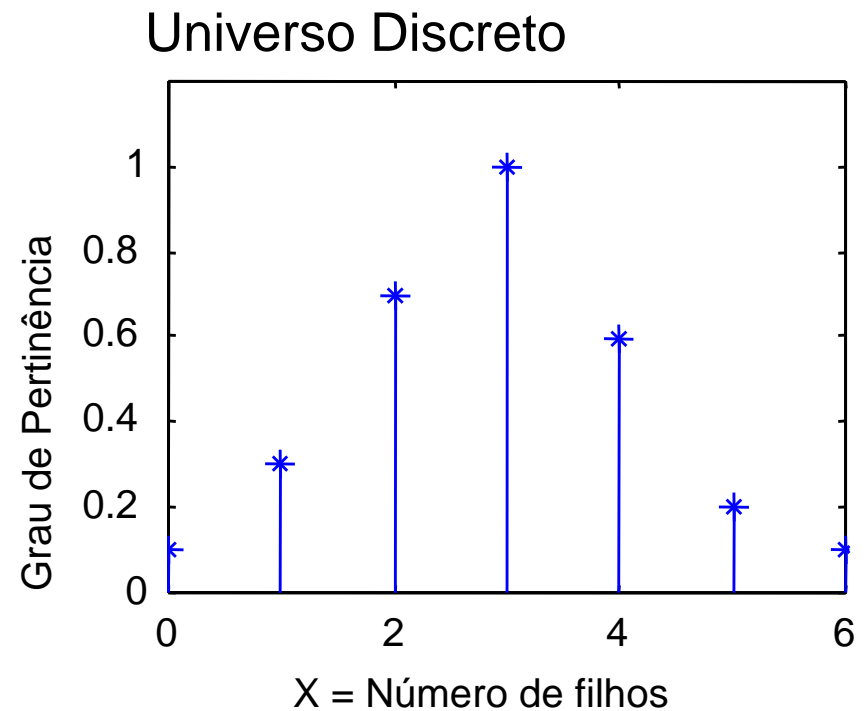


Função de Pertinência: Universo Discreto

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A = “Número de filhos”

$A = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0.1)\}$



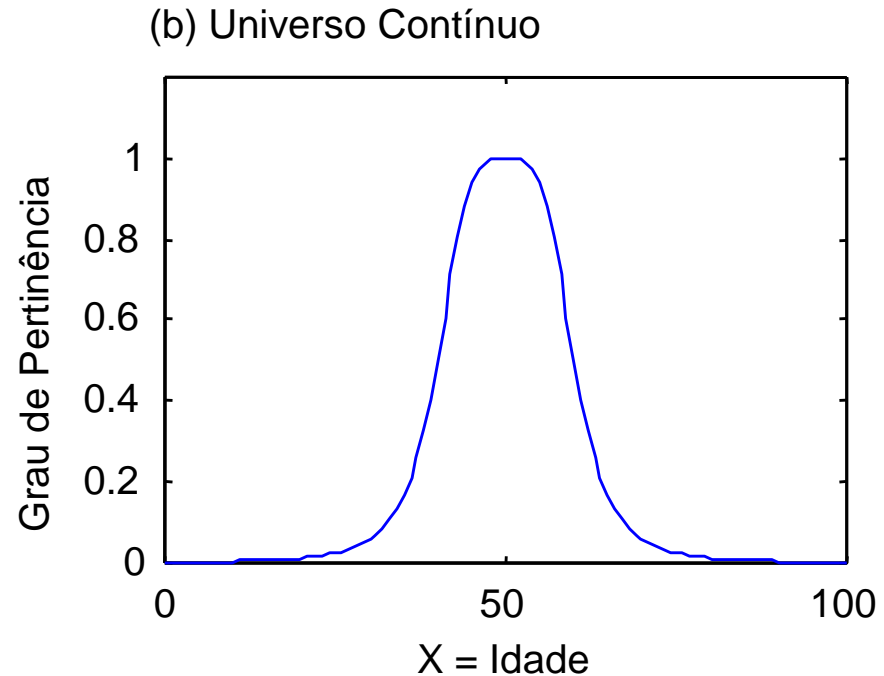
Função de Pertinência: Universo Contínuo

$X =$ (Conjunto de números reais positivos)

$B =$ “Pessoas com idade em torno de 50 anos”

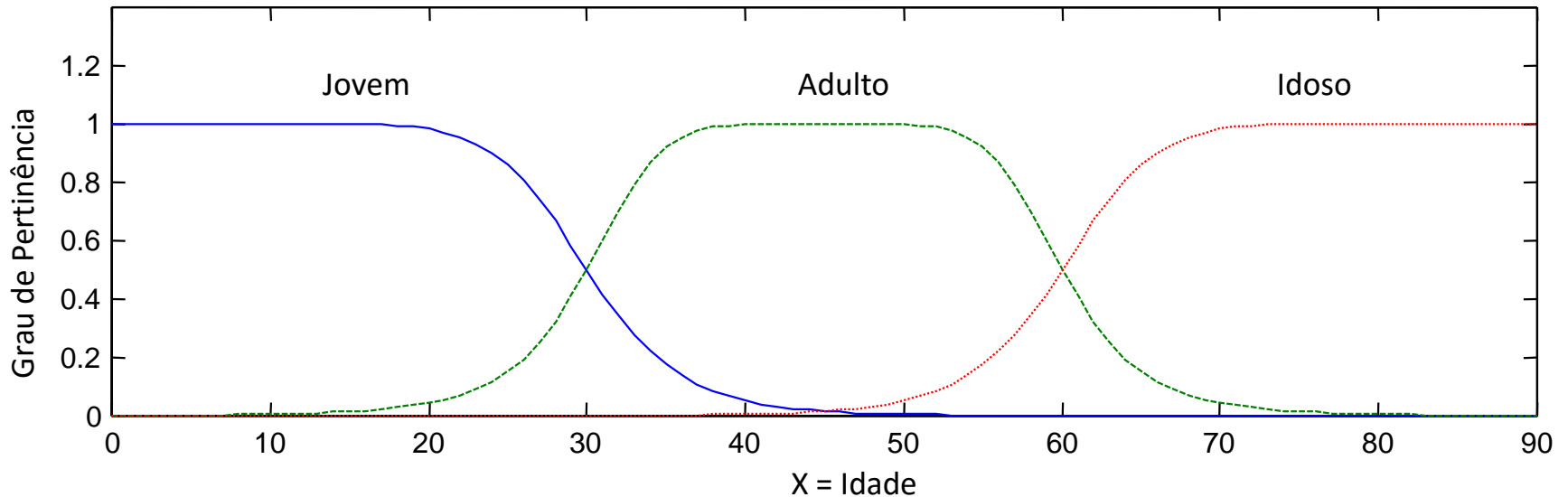
$B = \{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$



Partição Fuzzy

- Partição fuzzy do universo de X representando “idade”, formada pelos conjuntos fuzzy “jovem”, “adulto” e “idoso”.

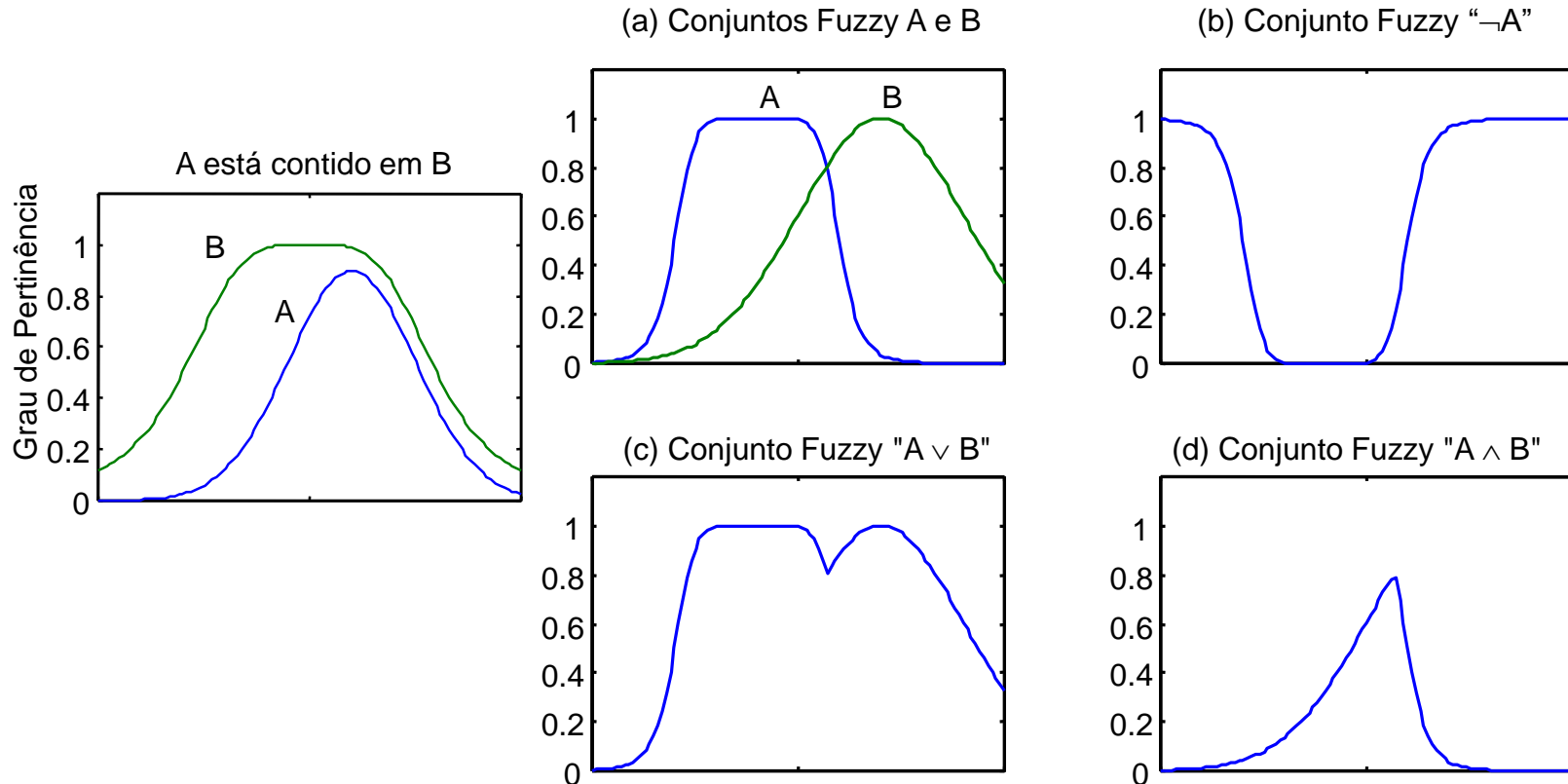


Variáveis Linguísticas

- Uma variável linguística possui valores que não são números, mas sim palavras ou frases na linguagem natural.
 - Idade = idoso
- Um valor linguístico é um conjunto fuzzy.
- Todos os valores linguísticos formam um conjunto de termos:
 - $T(\text{idade}) = \{\text{Jovem, velho, muito jovem, ...}$
 Adulto, não adulto, ...
 Velho, não velho, muito velho, mais ou menos velho...}
- Permitem que a linguagem da modelagem fuzzy expresse a semântica usada por especialistas. Exemplo:

Se duração_do_projeto == não muito longo **então**
 risco = ligeiramente reduzido

Operações Básicas



Exemplo: União e Interseção

- $X = \{a, b, c, d, e\}$
 - $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$
 - $B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$
 - União: $A \vee B = \max(A;B)$
 - $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$
 - Interseção: $A \wedge B = \min(A;B)$
 - $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$

Regras Fuzzy

Regras Fuzzy consistem em:

- Um conjunto de condições IF (usando conectivos *and*, *or* ou *not*)
- Uma conclusão THEN
- Uma conclusão opcional ELSE

Exemplo:

Se velocidade > 100 Então

DPP é 30 metros

Se velocidade < 40 Então

DPP é 10 metros

Se velocidade é alta Então

DPP é longa

Se velocidade é baixa

Então DPP é curta

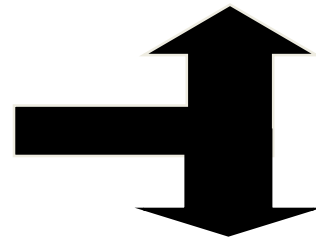
Etapas do Raciocínio Fuzzy

1ª Fuzzificação

2ª Inferência

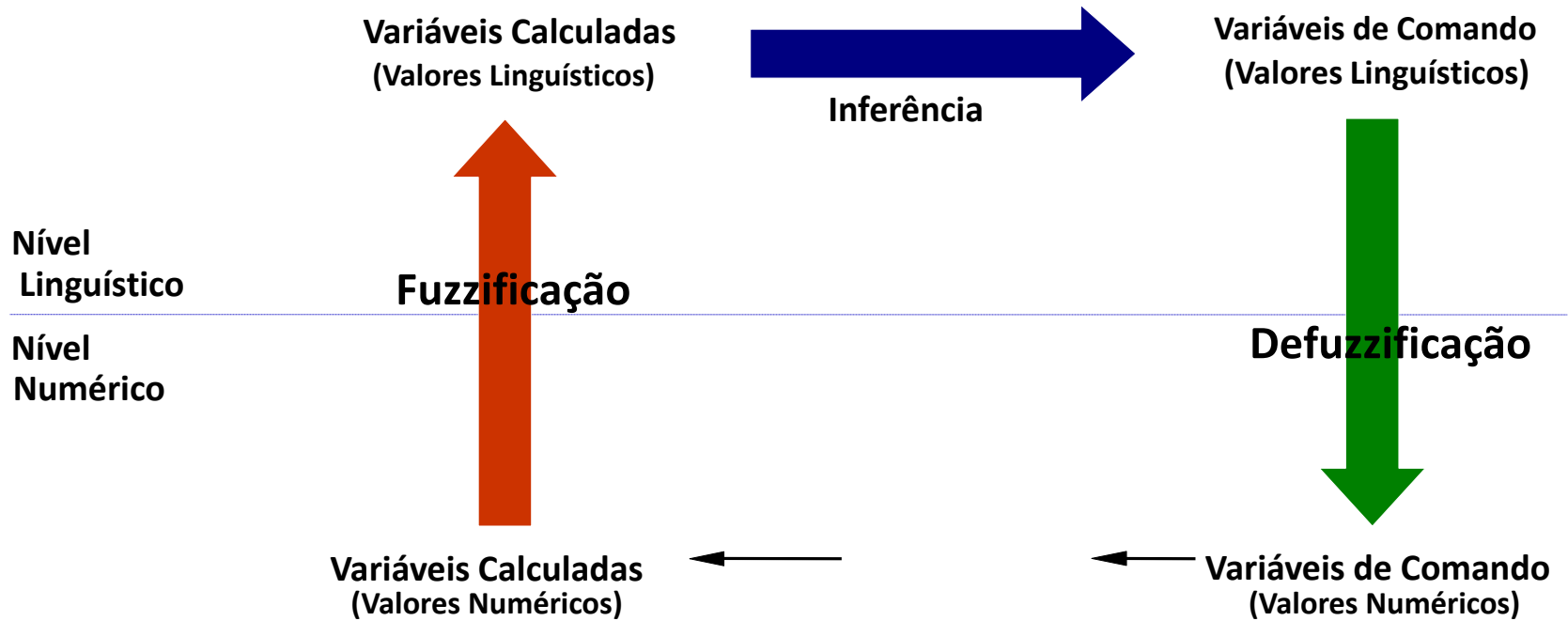
3ª Defuzzificação

Agregação



Composição

Etapas do Raciocínio Fuzzy

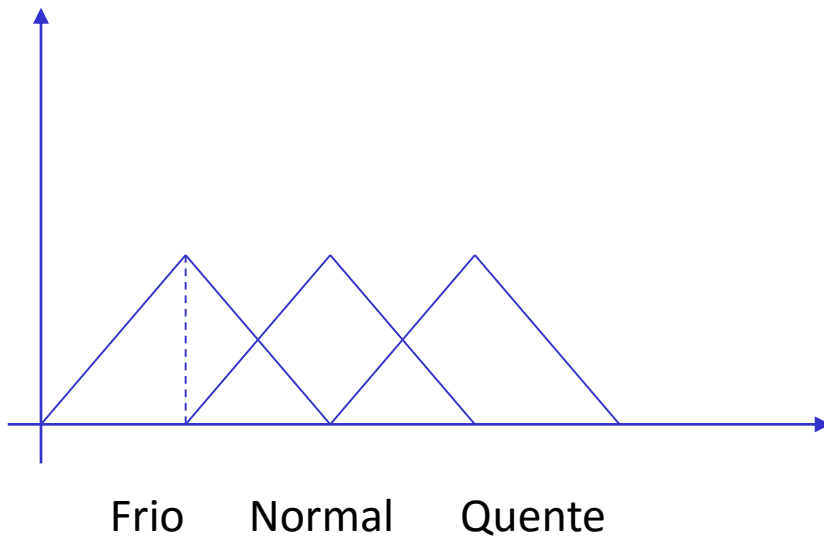


Fuzzificação

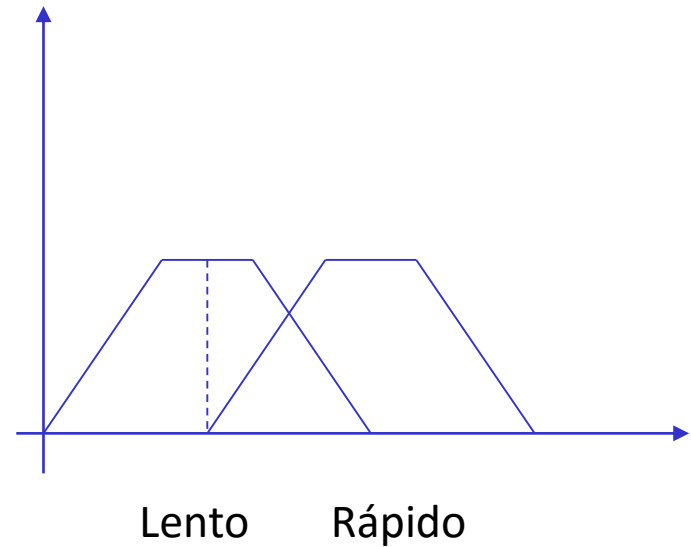
- Etapa na qual as **variáveis linguísticas** e as **funções de pertinência** são definidas de forma subjetiva.
- Engloba
 - Análise do Problema
 - Definição das Variáveis
 - Definição das Funções de pertinência
 - Criação das Regiões
- Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
 - Triangular, Trapezoidal, ...

Fuzzificação

Triangular



Trapezoidal



Inferência Fuzzy

- Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente
- Engloba:
 - Definição das proposições
 - Análise das Regras
 - Criação da região resultante

Inferência Fuzzy

- O mecanismo chave do modelo Fuzzy é a proposição.
- A proposição é o relacionamento entre as variáveis do modelo e regiões Fuzzy.
- Na definição das proposições, deve-se trabalhar com:
 - Proposições Condicionais:
Se $W == Z$ então $X = Y$
 - Proposições Não-Condicionais:
 $X = Y$

Inferência Fuzzy

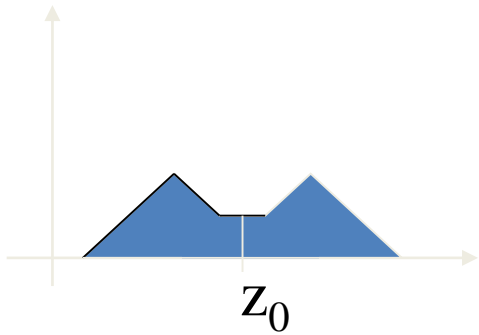
- **Agregação:** Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente
- **Composição:** Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída.

Defuzzificação

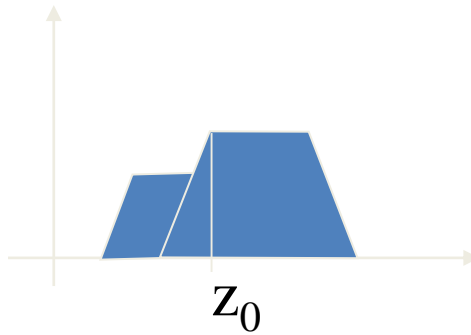
- Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema.
- Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado.
- Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação destaca-se:
 - Centróide
 - *First-of-Maxima*
 - Middle-of-Maxima
 - Critério Máximo

Defuzzificação

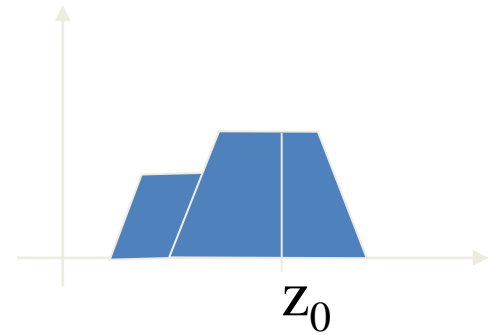
- Exemplos:



Centróide



First-of-Maxima



Critério Máximo

Exemplo Inferência Fuzzy

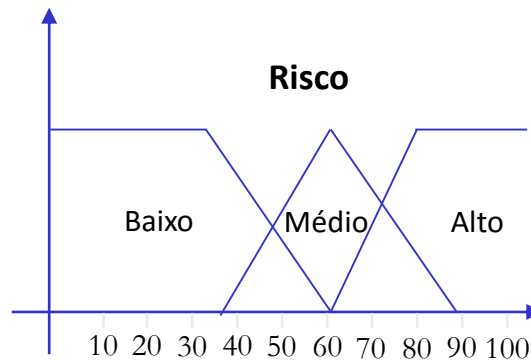
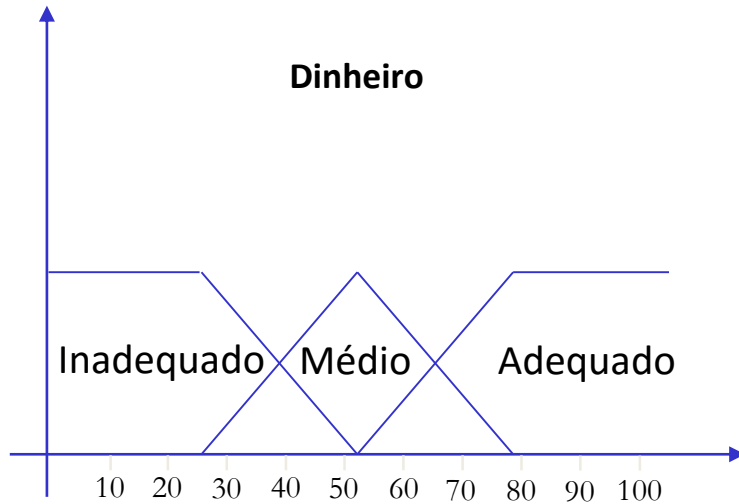
- **Exemplo:**

- Um analista de projetos de uma empresa quer determinar o risco de um determinado projeto.
- **Variáveis:** Quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto.

- **Base de conhecimento:**

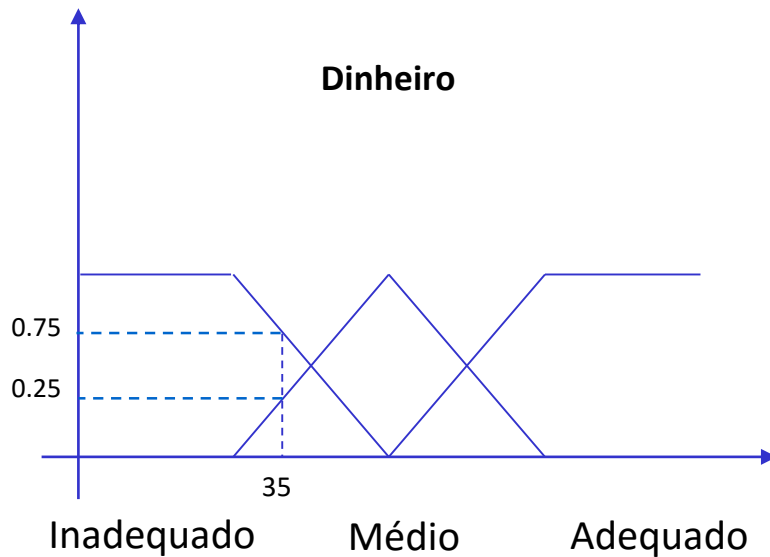
- Se dinheiro é adequado ou o número de pessoas é pequeno então risco é pequeno.
- Se dinheiro é médio e o número de pessoas é alto, então risco é normal.
- Se dinheiro é inadequado, então risco é alto.

Exemplo Inferência Fuzzy

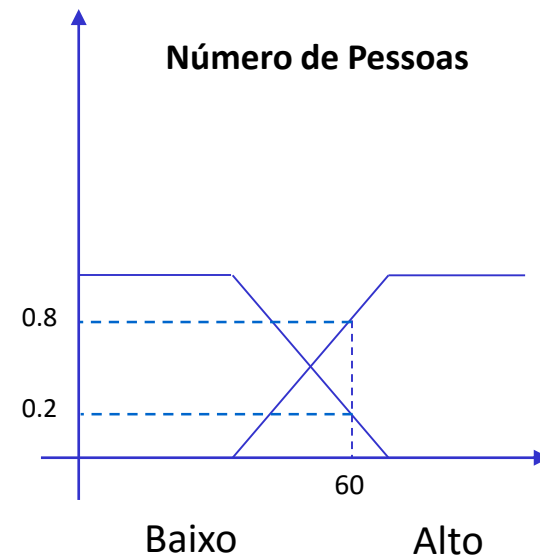


Exemplo Inferência Fuzzy

- **Passo 1: Fuzzificar**



$$\mu_i(d) = 0,25 \text{ \& } \mu_m(d) = 0,75$$



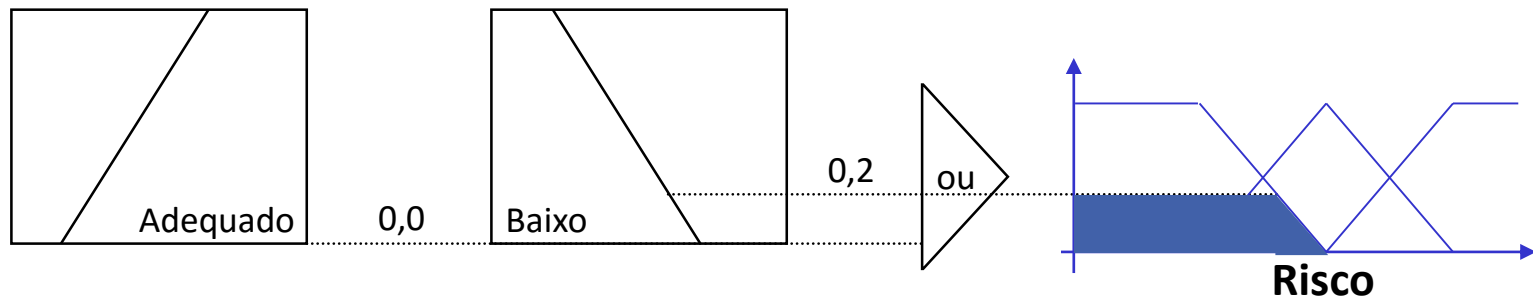
$$\mu_b(p) = 0,2 \text{ \& } \mu_a(p) = 0,8$$

Exemplo Inferência Fuzzy

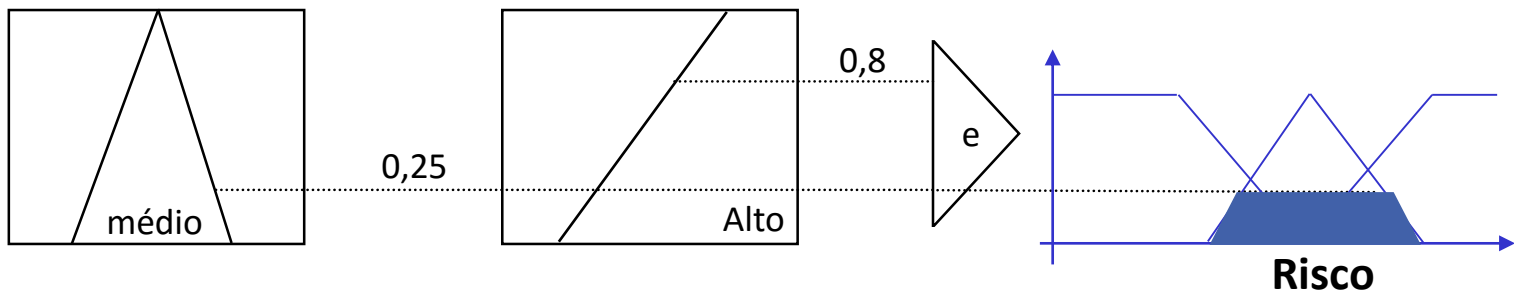
- **Passo 2: Avaliação das regras**

- Ou \rightarrow máximo e \rightarrow mínimo

Regra 1: Se dinheiro é adequado ou o número de pessoas é pequeno então risco é pequeno.



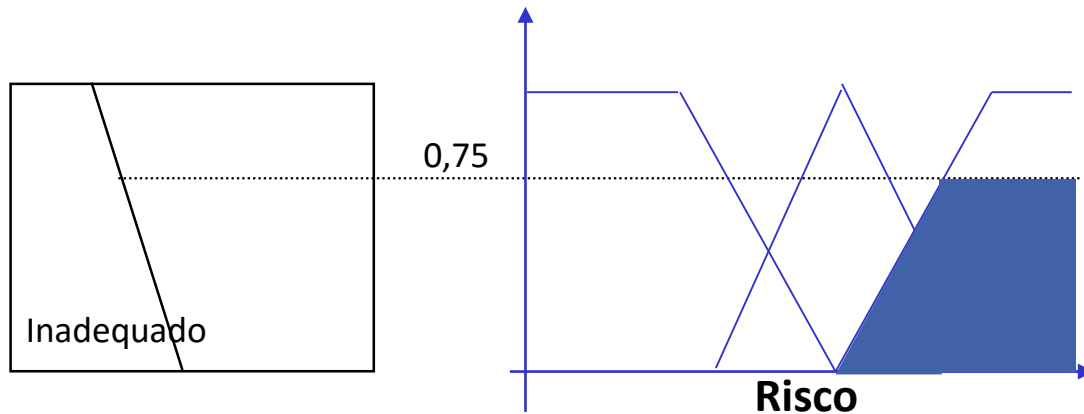
Regra 2: Se dinheiro é médio e o numero de pessoas é alto, então risco é normal.



Exemplo Inferência Fuzzy

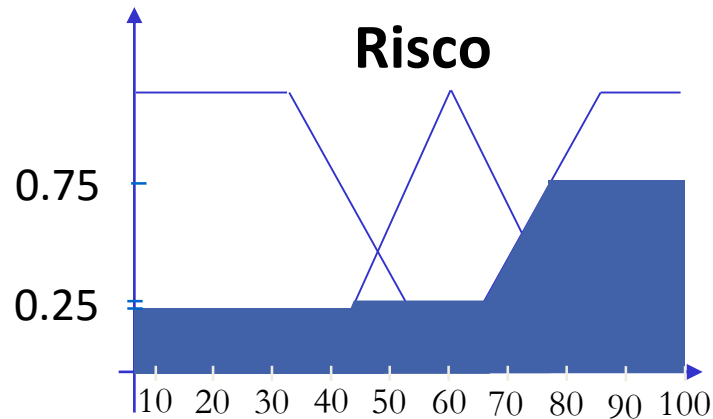
- **Passo 2: Avaliação das regras**

Regra 3: Se dinheiro é inadequado, então risco é alto.



Exemplo Inferência Fuzzy

- **Passo 3: Defuzzificação**



Cálculo do Centróide

$$C = \frac{(10 + 20 + 30 + 40) * 0,2 + (50 + 60 + 70) * 0,25 + (80 + 90 + 100) * 0,75}{0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$

$$C = \frac{(10 + 20 + 30 + 40) * 0,2 + (50 + 60 + 70) * 0,25 + (80 + 90 + 100) * 0,75}{4 * 0,2 + 3 * 0,25 + 3 * 0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$

Leitura Complementar

- Coppin, B. **Artificial Intelligence Illuminated**, Jones & Bartlett Learning, 2004.

- **Capítulo 18: Fuzzy Reasoning**

