Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

INF 1771 – Inteligência Artificial

Aula 19 – Incerteza

2016.1

Prof. Augusto Baffa
<abaffa@inf.puc-rio.br>

Agentes Vistos Anteriormente

- Agentes baseados em busca:
  - Busca cega
  - Busca heurística
  - Busca local

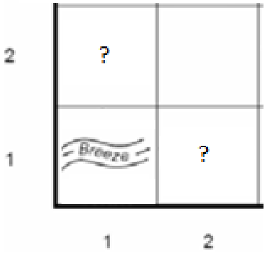
- Agentes baseados em lógica:
  - Lógica proposicional
  - Lógica de primeira ordem

- Agentes baseados em planejamento:
  - Planejamento de ordem parcial
  - Planejamento em ambientes não-determinísticos

- Agentes com Aprendizagem

Incerteza

- Mundo parcialmente observável: Agentes raramente tem acesso à toda informação sobre o ambiente.



- Mundo de Wumpus:
  - Apenas informações locais.
  - Maior parte do ambiente não é imediatamente observável.
  - Incerteza de fatos:

- O mundo real é muito mais complexo do que o mundo de wumpus. Informações não garantem resultados.

Incerteza

- Exemplo: Levar alguém ao aeroporto para pegar um vôo.

- Seja a ação A_t = sair para o aeroporto *t* minutos antes do vôo.
  - A_t levará o passageiro ao aeroporto a tempo?

- Dificuldades de saber o resultado da ação:
  - Estados parcialmente observáveis.
    - Estados das estradas, trânsito, etc.
  - Sensores ruidosos.
    - Relatórios de trafego
  - Incerteza quanto ao efeito das ações.
    - Acidentes, pneu furado, etc.
  - Grande complexidade em prever e modelar o trânsito.

Incerteza

- Assim, um procedimento puramente lógico não é muito útil nesse caso:
  - Arriscaria deduzir algo potencialmente falso:
    - “A_{45} me levará a tempo ao aeroporto”
  - Levaria a conclusões fracas para tomada de decisões:
    - “A_{45} me levará a tempo ao aeroporto, se nenhum acidente ocorrer na ponte, se não chover, se nenhum pneu furar, etc.”
  - Levaria a conclusões que não práticas:
    - “A_{1440} me levará a tempo ao aeroporto”

Incerteza

- O plano escolhido deve maximizar a performance do agente.
  - Chegar no aeroporto a tempo.
  - Não perder tempo esperando no aeroporto.

- O agente não tem como garantir nenhum sucesso em seus objetivos.

- Mas ele pode prever um certo grau de crença que ele terá sucesso em seus objetivos.

Métodos para lidar com incerteza

- Default ou lógica não monotônica:
  - Assuma que o carro não possua um pneu furado;
  - Assuma que A_{25} funcionaria a menos que haja evidência do contrário;
  - Quais (e quantas) hipóteses são razoáveis?
  - Como manipular conclusões falhas?
- Regras com fatores de incerteza:
  - A_{25} |-> 0.3 chegar ao aeroporto a tempo
  - mangueira |-> 0.99 grama molhada
  - Grama molhada |-> 0.7 chuva
- Problemas com a combinação de regras contraditórias:
  - A mangueira causa chuva?

Métodos para lidar com incerteza

- Probabilidade
  - Modela o grau de crença de um agente
  - Dado evidências disponíveis
  - A_{25} chegará ao aeroporto a tempo com probabilidade 0.04
- (Fuzzy manipula o grau de veracidade NÃO incerteza. E.g. "Grama está molhada" é verdade com um grau de 0.2)

Incerteza

- A coisa certa a se fazer depende da importância dos objetivos e da probabilidade de que eles serão alcançados.

- É necessário lidar com a incerteza e a imprecisão dos ambientes.

Incerteza

- Considerando a seguinte regra em lógica de primeira ordem:
  - $\forall p$ Sintoma(p, Dor_de_Dente) $\Rightarrow$ Doença(p, Cáries)
- A regra esta errada. Nem todas as pessoas que tem dor de dente tem cáries, algumas podem ter outras doenças.
  - $\forall p$ Sintoma(p, Dor_de_Dente) $\Rightarrow$ Doença(p, Cáries) $\vee$ Doença(p, Gengivite) $\vee$ Doença(p, Abscesso)...
- Para tornar essa regra verdadeira seria necessário adicionar a ela uma lista infinita de possibilidades.

Incerteza

- Tentar utilizar lógica de primeira ordem para lidar com um domínio de diagnóstico médico falha por três razões:
  - Preguiça: É muito trabalho listar o conjunto completo de sentenças necessárias para garantir uma regra sem exceção.
  - Ignorância teórica: A medicina não tem nenhuma teoria completa para todos os domínios.
  - Ignorância prática: Mesmo conhecendo todas as regras, poderiam existir dúvidas sobre um determinado paciente.
- Este tipo de problema afeta também outros domínios: Negócios, Direito, Design, Reparação automóveis, Jardinagem...

Fontes de Incerteza

- Informações precisas podem ser muito complexas para serem modeladas.

- É necessário lidar com informações incompletas.

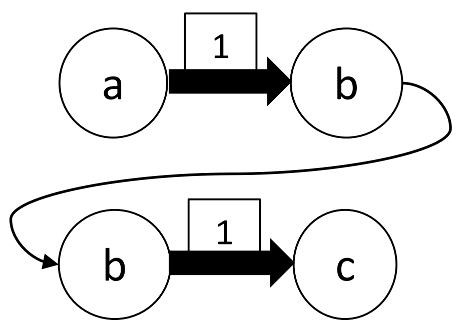
  – Implicações podem ser modeladas de forma mais fraca:

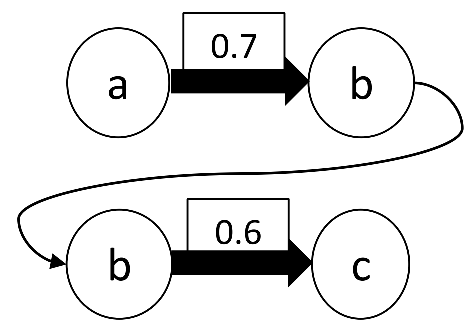
    - Dor_de_Dente(0.7) ⇒ Doença(Cáries)

Quantificação do número de vezes em que a regra se aplica.

Fontes de Incerteza

- Conflito de informações:
  - Especialistas distintos podem fornecer informações conflitantes e incertas.
- Propagação de incertezas:
  - Fatos com um certo grau de incerteza implicam em outros fatos com um grau de incerteza ainda maior.
  - Exemplo:
    - a ⇒ b
    - b ⇒ c





Lidando com a Incerteza

- A principal ferramenta para se lidar com a incerteza é a teoria da probabilidade. Busca-se atribuir um grau de crença numérica (entre 0 e 1) a cada sentença.

- Modela-se o grau de crença de um agente dadas as evidências disponíveis:

  - "A_{25} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.04"
  - "A_{45} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.85"
  - "A_{60} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.95"

Probabilidade

- A probabilidade subjetiva ou bayesiana estabelece o estado de crença do agente em uma sentença dadas as evidências.
  - $P(A_{25}|\text{nenhum acidente}) = 0.06$
- A probabilidade de uma sentença muda quando novas evidências chegam.
  - $P(A_{25}|\text{nenhum acidente}) = 0.06$
  - $P(A_{25}|\text{nenhum acidente, 5 a.m.}) = 0.15$

Decisões sob Incerteza

- Supondo o seguinte conjunto de crenças:
  - $P(A_{25}|...) = 0.04$
  - $P(A_{90}|...) = 0.70$
  - $P(A_{120}|...) = 0.95$
  - $P(A_{1440}|...) = 0.9999$
- Que ação o agente deve tomar?
  - Depende da preferência entre perder o vôo versus o tempo esperando no aeroporto.
    - Teoria da utilidade = representação de preferências
    - Teoria da decisão = teoria da probabilidade + teoria da utilidade

Introdução à Probabilidade

- Elemento básico da probabilidade é uma variável aleatória.
  - Semelhante a lógica proposicional e de primeira ordem, onde os mundos possíveis são definidos pela atribuição de valores às variáveis.

  - Cada variável aleatória tem um domínio que determina seus valores possíveis.
    - Tipos de domínio:
      - Booleano, exemplo: Cárie possui valores em <verdadeiro, falso>
      - Discreto, exemplo: Clima possui valores em <ensolarado, chuvoso, nublado, neve>
      - Contínuo, exemplo: Temperatura

Introdução à Probabilidade

- Proposições elementares:
  - São construídas através da atribuição de valores a variáveis.
  - Exemplo: Cárie = falso, Clima = chuvoso
- Proposições complexas:
  - São formadas a partir de proposições elementares e conectivos lógicos padrão.
  - Exemplo: Clima = chuvoso $\land$ Cárie = falso

Introdução à Probabilidade

- Um evento atômico consiste da especificação completa do estado do mundo sobre o qual o agente está incerto.
  - Uma atribuição de valores a TODAS as variáveis das quais o mundo é formado.

- Exemplo:
  - Cárie = verdadeiro $\wedge$ DorDeDente = verdadeiro
  - Cárie = verdadeiro $\wedge$ DorDeDente = falso
  - Cárie = falso $\wedge$ DorDeDente = verdadeiro
  - Cárie = falso $\wedge$ DorDeDente = falso

Probabilidade incondicional ou *"a priori"*

- O grau de crença em uma proposição na ausência de outras informações pode ser definida da seguinte maneira:

  - P(Cárie = verdadeiro) = 0.1
  - P(Clima = ensolarado) = 0.72

- Distribuição de probabilidades:

  - P(Clima) = (0.7, 0.2, 0.08, 0.02)

Distribuição de probabilidade da variavel randomica *Clima* = (ensolarado, chuvoso, nublado, neve)

Distribuição de Probabilidade Conjunta

- Probabilidades de todas as combinações de valores de um conjunto de variáveis aleatórias.

  – P(Clima, Cárie) = tabela 4 x 2 de valores de probabilidade.

Clima	ensolarado	chuvoso	nublado	Neve
Cárie = verdadeiro	0.144	0.02	0.016	0.02
Cárie = falso	0.576	0.08	0.064	0.08

- Uma distribuição conjunta total especifica a probabilidade de qualquer evento atômico.

  – Qualquer probabilidade nesse domínio pode ser calculada a partir da distribuição conjunta total.

Probabilidade Condicional ou "*a posteriori*"

- O grau de crença em uma proposição dada a presença de novas evidências pode ser definido utilizando a notação P(a|b):

  - P(Cárie = verdadeiro|Dor_De_Dente = verdadeiro) = 0.6

  - P(Cárie = verdadeiro|Dor_De_Dente = verdadeiro, Escova_Dentes_Regularmente = false) = 0.7

- P(a|b) = "A probabilidade de a dado todo o conhecimento b".

Probabilidade Condicional

- A probabilidade condicional pode ser definida em termos de probabilidades a priori:

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \qquad \text{para} \quad P(b) > 0$$

- A mesma equação também pode ser escrita da seguinte maneira utilizando a regra do produto:

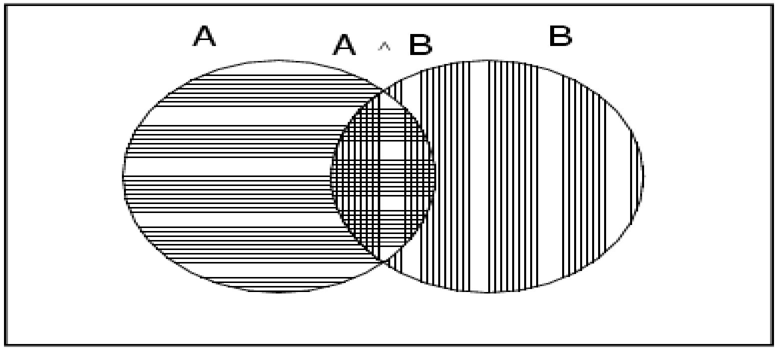
$$P(a \wedge b) = P(a \mid b) P(b)$$

- Ou:

$$P(a \wedge b) = P(b \mid a) P(a)$$

Axiomas da Probabilidade

- Para quaisquer proposições A, B:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - P(Verdade) = 1
  - P(Falso) = 0
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$



Probabilidade

- A probabilidade de uma proposição é igual à soma das probabilidades dos eventos atômicos em que ela é válida:

$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

- Essa equação permite calcular a probabilidade de qualquer proposição dada uma distribuição conjunta total que especifique todos os eventos atômicos.

Inferência Probabilística

- Inferência probabilística consiste na computação da distribuição de probabilidade posterior para um conjunto de variáveis de consulta C dada alguma evidência observada.

- A inferência é realizada com o uso de distribuições conjuntas totais. Ou seja, uma base de conhecimento a partir da qual são derivadas respostas para todas as consultas.

Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição a, P(a) é a soma dos eventos atômicos w onde a ocorre:

$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição a, P(a) é a soma dos eventos atômicos w onde a ocorre:

$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

  - P(Dor_De_Dente) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2

Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição a, P(a) é a soma dos eventos atômicos w onde a ocorre:

$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

  – P(Dor_De_Dente $\vee$ Cárie) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 + 0.072 + 0.008 = 0.28

Inferência Probabilística

- É possível também calcular probabilidades condicionais: $P(a \mid b) = \dfrac{P(a \wedge b)}{P(b)}$

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\neg Cárie \mid Dor\_De\_Dente) = \frac{P(\neg Cárie \wedge Dor\_De\_Dente)}{P(Dor\_De\_Dente)}$$

$$P(\neg Cárie \mid Dor\_De\_Dente) = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

Inferência Probabilística

- O denominador pode ser visto como uma constante de normalização α.

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(Cárie \mid Dor\_De\_Dente) = \alpha P(Cárie,\ Dor\_De\_Dente)$$
$$= \alpha[P(Cárie,\ Dor\_De\_Dente, Sonda) + P(Cárie,\ Dor\_De\_Dente, \neg Sonda)]$$
$$= \alpha[< 0.108, 0.016 > + < 0.012, 0.064 >]$$
$$= \alpha[< 0.12, 0.08 >]$$
$$= < 0.6, 0.4 >$$

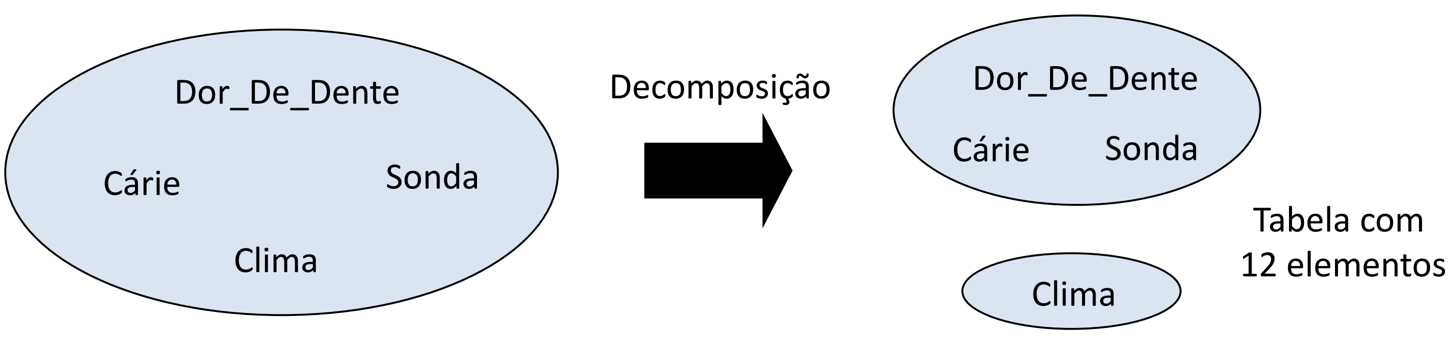
$$\alpha = P(Dor\_De\_Dente) = 0.2$$
$$= [< 0.12, 0.08 >] / 0.2$$
$$= < 0.6, 0.4 >$$

Problemas com a inferência por enumeração

- Complexidade de tempo (pior caso): O(dn)
  - onde d é a cardinalidade do maior domínio e n é o número de variáveis.
- Complexidade de espaço: O(dn) para armazenar a distribuição conjunta.
- Como encontrar as probabilidades para O(dn) elementos?

Independência

- X e Y são independentes se e somente se:
  - P(X|Y) = P(X) ou P(Y|X) = P(Y) ou P(X,Y) = P(X)P(Y)
- Exemplo: P(Dor_De_Dente, Sonda, Cárie, Clima)
  - Tabela com 32 elementos.
  - P(Dor_De_Dente,Cárie,Sonda,Clima) = P(Dor_De_Dente,Cárie,Sonda)P(Clima)



Independência Condicional

- Se eu tenho cárie, a probabilidade do boticão acertar esse dente não depende de minha dor de dente:
  - (1) P(Sonda|Dor_De_Dente, Cárie) = P(Sonda|Cárie)

- A mesma independência ocorre se eu não tiver uma cárie:
  - (2) P(Sonda|Dor_De_Dente, $\neg$Cárie) = P(Sonda|$\neg$Cárie)

- I.e. Sonda (Boticão) é condicionalmente independente da Dor_De_Dente dado Cárie:
  - P(Sonda|Dor_De_Dente,Cárie) = P(Sonda|Cárie)

- Sentenças Equivalentes :
  - P(Dor_De_Dente|Sonda, Cárie) = P(Dor_De_Dente|Cárie)
  - P(Dor_De_Dente, Sonda|Cárie) = P(Dor_De_Dente|Cárie) P(Sonda|Cárie)

Independência Condicional

- Escrevendo toda a distribuição total utilizando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} &P(Dor\_De\_Dente, Sonda, Cárie) \\ &\quad = P(Dor\_De\_Dente|Sonda, Cárie)\ P(Sonda, Cárie) \\ &\quad = P(Dor\_De\_Dente|Sonda, Cárie)\ P(Sonda|Cárie)\ P(Cárie) \\ &\quad = P(Dor\_De\_Dente|Cárie)\ P(Sonda|Cárie)\ P(Cárie) \end{aligned}$$

- Na maioria dos caso, o uso da independência condicional reduz o tamanho da representação em distribuição conjunta de exponencial em *n* para linear em *n*.

Teorema de Bayes

- Seja:
  - P(A|B) a probabilidade de que a hipótese *A* seja verdadeira dada a evidência *B*.
  - P(B|A) a probabilidade que a evidência *B* será observada se a hipótese *A* for verdadeira.
  - P(A) a probabilidade "*a priori*" que a hipótese *A* é verdadeira na ausência de qualquer evidência específica.
  - *k* o número de hipóteses possíveis.

- O Teorema de Bayes é formulado como:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{\sum_{n=0}^{k} P(B|A_n) * (P(A_n))} \qquad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Regra de Bayes – Exemplo

- Para aplicar a regra de Bayes é necessário três termos:
  - Uma probabilidade condicional.
  - Duas probabilidades incondicionais.

- Exemplo de diagnostico médico:
  - “um médico sabe que a meningite causa torcicolo em 50% dos casos. Porém, o médico também conhece algumas probabilidades incondicionais que dizem que, um caso de meningite atinge 1/50000 pessoas e, a probabilidade de alguém ter torcicolo é de 1/20”.

Regra de Bayes – Exemplo

- Considerando:
  - T = probabilidade incondicional de um paciente ter torcicolo:
    $P(T) = 1/20$
  - M = probabilidade incondicional de um paciente ter meningite.
    $P(M) = 1/50000$
  - $P(T|M) = 0.5$ (probabilidade de ter torcicolo tendo meningite)

Regra de Bayes – Exemplo

- Aplicando a regra de Bayes:

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)}$$

$$P(M \mid T) = \frac{0.5 \times 1/50000}{1/20}$$

$$P(M \mid T) = 0.0002$$

- É esperado que apenas 1 em 5000 pacientes com torcicolo tenha meningite.

- Apesar de torcicolo ser um fortemente indicativo de meningite (com probabilidade 0.5), a probabilidade de meningite no paciente permanece pequena.

Regra de Bayes – Combinando Evidencias

- P(Cárie|Dor_De_Dente ∧ Sonda)

  $= \alpha<0.108,0.016>$

  $= <0.871,0.129>$

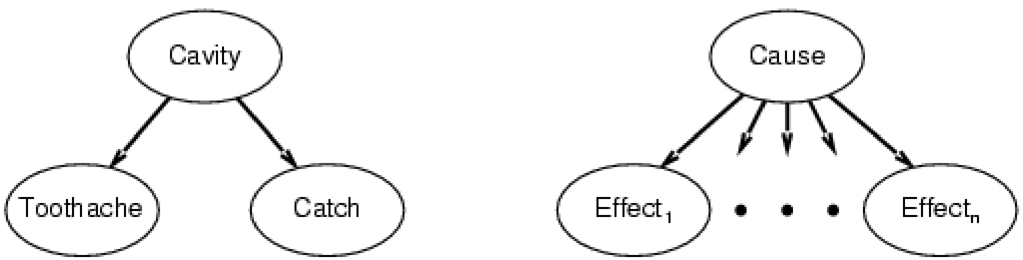
- Utilizando o conceito de independência é possível reduzir o problema de escala em problemas mais complexos.

- Funcionaria se Dor_De_Dente e Sonda fossem independentes, mas eles não são. Essas variáveis são independentes somente dado a presença ou a ausência de Cárie.

Regra de Bayes – Combinando Evidencias

- Dor_De_Dente e Sonda são causas diretas de Cárie, mas não tem nenhum efeito direto uma sobre a outra.
  - $P(Dor\_De\_Dente \land Sonda|Cárie) = P(Dor\_De\_Dente|Cárie)P(Sonda|Cárie)$

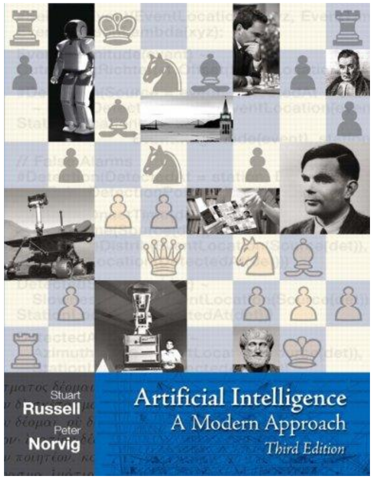
- Para obter a probabilidade de Cárie:
  - $P(Cárie|Dor\_De\_Dente \land Sonda) =$
    $\alpha P(Dor\_De\_Dente|Cárie)P(Sonda|Cárie)P(Cárie)$



- O número total de parâmetros é linear *n*

Leitura Complementar

- Russell, S. and Norvig, P. **Artificial Intelligence: a Modern Approach**, 3nd Edition, Prentice-Hall, 2009.
  - **Capítulo 13: Uncertainty**



- Coppin, B. **Artificial Intelligence Illuminated**, Jones & Bartlett Learning, 2004.
  - **Capítulo 12: Probabilistic Reasoning and Bayesian Belief Networks**